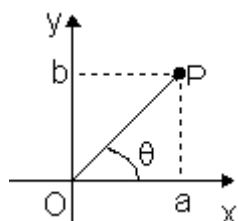
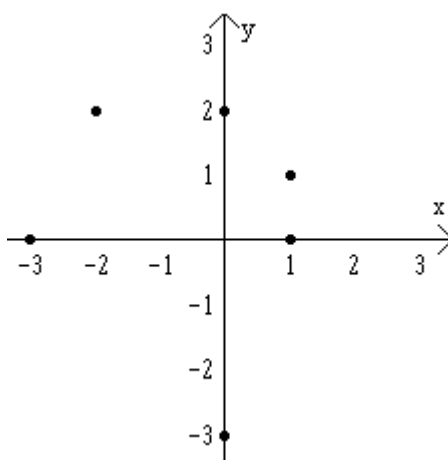
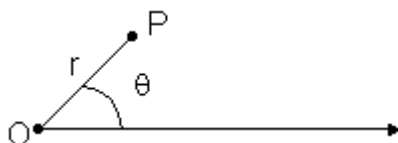
Coordenadas Polares

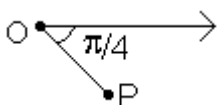
Mauri C. Nascimento – Dep. De Matemática – FC – Unesp/Bauru

Dado um ponto P do plano, utilizando coordenadas cartesianas (retangulares), descrevemos sua localização no plano escrevendo P = (a,b) onde a é a projeção de P no eixo x e b, a projeção no eixo y. Podemos também descrever a localização de P, a partir da distância de P à origem O do sistema, e do ângulo formado pelo eixo x e o segmento OP, caso $P \neq O$. Denotamos $P = (r,\theta)$ onde r é a distância de P a O e θ o ângulo tomado no sentido anti–horário, da parte positiva do eixo Ox ao segmento OP, caso $P \neq O$. Se P = O, denotamos $P = (0,\theta)$, para qualquer θ. Esta maneira representar o plano é chamada Sistema de Coordenadas Polares.

Exemplos.

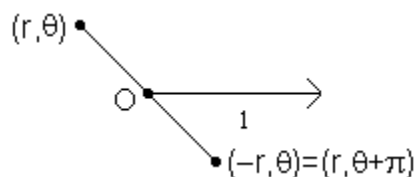
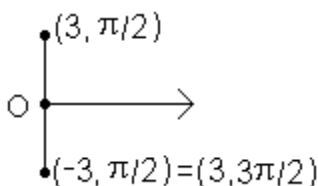
Coordenadas cartesianas	Coordenadas polares
(1,0)	(1,0)
(0,2)	$(2,\pi/2)$
(-3,0)	$(3,\pi)$
(0,-3)	$(3,3\pi/2)$
(1,1)	$(\sqrt{2},\pi/4)$
(-2,-2)	$2\sqrt{2},3\pi/4)$

Para representar pontos em coordenadas polares, necessitamos somente de um ponto O do plano e uma semi–reta com origem em O. Representamos abaixo um ponto P de coordenadas polares (r,θ), tomando o segmento OP com medida r.

O ponto fixo O é chamado ***polo*** e a semi–reta, ***eixo polar***.

Em coordenadas polares, podemos ter representações diferentes para um mesmo ponto, isto é, podemos ter $P = (r,\theta)$ e $P = (s, \alpha)$ sem que $r = s$ e $\theta = \alpha$, ou seja $(r,\theta) = (s,\alpha)$ não implica em $r = s$ e $\theta = \alpha$. Assim, (r,θ) não representa um par ordenado, mas sim uma classe de pares ordenados, representando um mesmo ponto.

Denotamos um ponto P por $(r,-\theta)$, para r e θ positivos, se θ é tomado no sentido horário. Assim, $(r,-\theta) = (r,2\pi-\theta)$ e $(r,-\theta)$ é o simétrico de (r,θ) em relação à reta suporte do eixo polar.

Exemplo. $(1,-\pi/4) = (1, 7\pi/4)$

Denotamos P por $(-r,\theta)$, para r positivo, se $P = (r,\pi + \theta)$, ou seja, consideramos
$(-r,\theta) = (r,\theta+\pi)$. Assim, $(-r,\theta)$ é o simétrico de (r,θ) em relação ao polo.

Exemplo. $(3,\pi/2) = (-3,3\pi/2)$

(3, π/2)
O
(-3, π/2)=(3,3π/2)

Dado um ângulo θ, θ pode ser representado por $\theta+2k\pi$, para todo k inteiro. Assim, $(r,\theta) = (r,\theta+2\pi) = (r,\theta+4\pi) = (r,\theta - 2\pi) = (r,\theta - 4\pi) = \ldots$

Exemplo. $(5,\pi/2) = (5, \pi/2 + 10\pi) = (5, 21\pi/2)$

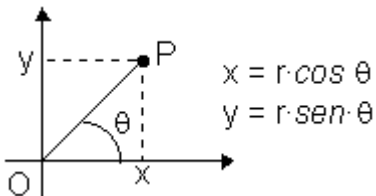
Mudança de coordenadas

Um ponto P do plano pode ser representado em coordenadas cartesianas por (x,y) ou em coordenadas polares por (r,θ). Para facilidade de comparação entre os dois

sistemas, consideramos o ponto O coincidindo com a origem do sistema cartesiano e, a semi-reta, a parte do não negativa do eixo x.

a) Mudança de coordenadas polares para coordenadas cartesianas

Seja P um ponto com coordenadas polares (r,θ).

Se $0 < \theta < \pi/2$ e $r > 0$. No triângulo retângulo OPx a seguir, obtemos as seguintes relações:

Se $\theta = 0$ e $r > 0$, temos P no eixo das abcissas. Logo, P tem coordenadas cartesianas $(x,0)$ e coordenadas polares $(x,0)$ ($r = x$ e $\theta = 0$). Assim, $x = x\cdot 1 = r\,cos\,\theta$ e $y = 0 = r\cdot 0 = r\,sen\,\theta$.

Se $r = 0$, $P = (0,\theta)$ para qualquer θ. Aqui também, $x = r\,cos\,\theta$ e $y = r\,sen\,\theta$.

Para os casos onde $\theta \geq \pi/2$, fica como exercício mostrar que também vale:

$x = r\,cos\,\theta$ e $y = r\,sen\,\theta$.

b) Mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares

Seja P um ponto com coordenadas cartesianas (x,y). Como vimos acima, considerando P com coordenadas (r,θ), temos as relações $x = r cos\theta$ e $y = r sen\theta$

Como $x^2+y^2 = r^2cos^2\theta+r^2sen^2\theta = r^2(cos^2\theta+sen^2\theta) = r^2\times 1 = r^2$, temos que $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Se $r = 0$, isto é, $x = y = 0$ então podemos tomar θ qualquer.

Se $r \neq 0$, θ é tal que $cos\theta = x/r$ e $sen\theta = y/r$.

Exemplo. Se P tem coordenadas polares $(-2,\pi/6)$, então $x = -2cos(\pi/6)$ e $y = -2sen(\pi/6)$. Logo, $x = -1$ e $y = -\sqrt{3}$, portanto, P tem coordenadas cartesianas $(-1, -\sqrt{3})$.

Exemplo. Se P tem coordenadas cartesianas $(-1,1)$ então $r^2 = (-1)^2 + 1^2$, ou seja, $r = \sqrt{2}$.

Como *cos* θ = $\frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e *sen* θ = $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ então θ = $3\pi/4$. Assim, P temo como coordenadas polares, ($\sqrt{2}$, $\frac{3\pi}{4}$)

Podemos também transformar equações cartesianas em polares e vice-versa.

Exemplo. A circunferência de centro na origem e raio 3 tem equação cartesiana $x^2+y^2 = 9$. Como x = r *cos* θ e y = r *sen* θ então $r^2 = 9$, ou seja, r = 3 é a equação polar dessa circunferência.

Exemplo. Se uma curva tem equação polar r = *cos* θ + *sen* θ, multiplicando ambos os membros da igualdade por r, obtemos $r^2 = r\cos\theta + r\,\text{sen}\,\theta$. Logo, $x^2 + y^2 = x + y$. Manipulando essa equação chegamos em $(x-½)^2 + (y-½) = ½$, ou seja, na equação da circunferência com centro em (½,½) e raio $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercícios.

1) Transforme coordenadas cartesianas em coordenadas polares:

a) (1,1) b) (2,–2) c) ($\sqrt{3}$,1) d) (4,0) e) (0,–3)

2) Transforme coordenadas polares em coordenadas cartesianas:

a) (1,π/2) b) (–2,49π/6) c) (3,–5π/3) d) (0,π/9) e) (7,π)

3) Encontre a equação polar para cada uma das seguintes equações cartesianas.

a) $(x-1)^2 + y^2 = 1$ b) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 13$ c) x = -2 d) y = 3 e) y = x

4) Encontre a equação cartesiana para cada uma das seguintes equações polares.

a) r = 5 b) r = 2*sen* θ c) r = 2*cos* θ - 4*sen* θ d) θ = π/3 e) *sen* θ = *cos* θ

f) r = $\frac{2}{3\,\text{sen}\,\theta - 5\cos\theta}$

5) Encontre as equações polares das seguintes curvas:

a) da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ b) da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ c) da parábola $y = x^2$.

Respostas. 1) a) ($\sqrt{2}$,π/4) b) (2$\sqrt{2}$, 7π/4) c) (2,π/6) d) (4,0) e) (3,3π/2)

2) a) (0,1) b) (–1,$-\sqrt{3}$) c) ($\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\frac{3}{2}$) d) (0,0) e) (–7,0)

3) a) $r = 2\cos(\theta)$ b) $r = 6\text{sen}(\theta) – 4\cos(\theta)$ c) $r = -2\sec(\theta)$ d) $r = 3\text{cossec}(\theta)$ e) $\theta = \frac{\pi}{4}$

4) a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $(x-1)^2 + + y^2 = 1$ c) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$ d) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ e) $y = x$

5) a) $r = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2(\theta) + a^2\,\text{sen}^2(\theta)}} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - (b^2 - a^2)\,\text{sen}^2(\theta)}}$

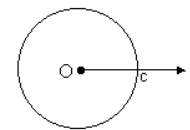
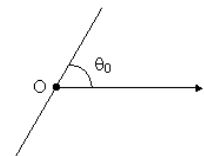
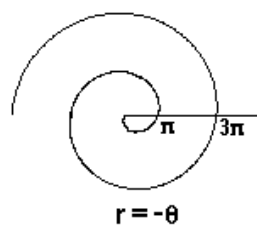
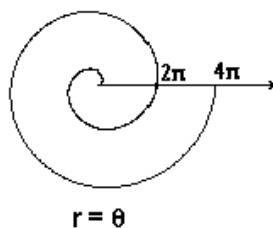
b) $r = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2(\theta) - a^2\,\text{sen}^2(\theta)}} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - (b^2 + a^2)\,\text{sen}^2(\theta)}}$

c) $r = \text{tg}(\theta)\sec(\theta)$

Gráficos em coordenadas polares

Como no caso de equações cartesianas, um ponto P está no gráfico da curva de equação $r = f(\theta)$ se, e somente se, $P = (r, f(\theta))$.

O uso de coordenadas polares simplifica, em alguns casos, equações de curvas. Apresentaremos alguns exemplos abaixo.

Exemplo 1. R = c, c uma constante positiva. Esta equação representa os pontos do plano, cuja distância ao polo é igual a c, isto é, representa a circunferência de raio c e centro no polo. Observe que r=-c representa a mesma circunferência.

Exemplo 2. $\theta = \theta_0$ onde $\theta_0 \geq 0$. Esta equação representa os pontos $P = (r,\theta_0)$ onde r é um número real qualquer. Logo, $\theta = \theta_0$ representa uma reta passando pelo polo e que forma um ângulo de θ_0 com o eixo polar.

Exemplo 3. $r = \theta$, $\theta \geq 0$. Representa os pontos P = (r,r) onde $r \geq 0$, ou seja, os pontos P tais que a distância de P ao polo é igual ao ângulo, em radianos, entre o eixo polar e o segmento OP. A equação geral da espiral é dada por $r = a\theta$, considerando $\theta \geq 0$. Abaixo temos os gráficos de $r = \theta$ e $r = –\theta$, para $0 \leq \theta \leq 4\pi$.

Procedimentos para traçar gráficos

1) Verificar se existem simetrias, isto é, se a equação se altera ao trocar:

a) θ por $-\theta$: simetria em relação à reta $\theta = 0$ (eixo x)

b) θ por $\pi-\theta$: simetria em relação à reta $\theta = \pi/2$ (eixo y)

c) θ por $\pi+\theta$: simetria em relação ao polo. É equivalente a trocar r por –r, pois $(-r,\theta) = (r,\theta+\pi)$. Logo $(r,\theta) = (-r,\theta) \Leftrightarrow (r,\theta) = (r,\theta+\pi)$.

2) Verificar se a curva passa pelo polo ($r = 0$)

3) Determinar os pontos da curva variando θ a partir de $\theta = 0$

4) Verificar a existência de pontos críticos (máximos e mínimos): $f(\theta)' = 0$ e $f''(\theta) > 0 \Rightarrow \theta$ é um mínimo relativo; $f(\theta)' = 0$ e $f''(\theta) < 0 \Rightarrow \theta$ é um máximo relativo.

5) Verificar se r não se altera ao trocar θ por $\theta+2\pi$. Caso não haja alteração, basta variar θ entre 0 e 2π.

No exemplo 1, temos simetrias em relação aos eixos coordenados e ao polo.

No exemplo 2, temos simetria em relação ao polo.

No exemplo 3, não temos nenhum tipo de simetria e ao trocar θ por $\theta+2\pi$, temos variação no valor de r.

As seguintes relações trigonométricas serão úteis aqui:

- $\cos(-\theta) = \cos\theta = \cos(2\pi-\theta) = \cos(2\pi+\theta)$ e $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$
- $\mathrm{sen}(-\theta) = -\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}(2\pi-\theta)$ e $\mathrm{sen}(\pi-\theta) = \mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}(\theta+2\pi)$

Exemplo 4. $r = \cos 2\theta$

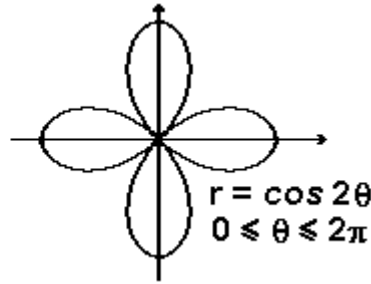
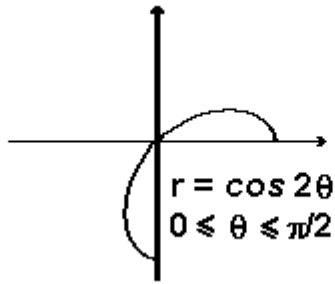
Temos $\cos 2\theta = \cos(-2\theta)$; $\cos 2(\pi-\theta) = \cos(2\pi-2\theta) = \cos(-2\theta) = \cos 2\theta$ e $\cos 2(\pi+\theta) = \cos(2\pi+2\theta) = \cos 2\theta$. Logo, existem simetrias em relação ao polo e em relação aos eixos x e y.

Derivando r em relação a θ, temos $dr/d\theta = -2\mathrm{sen}(2\theta)$, logo, $\theta = k\pi/2$, k inteiro, são pontos críticos. A derivada segunda de r fica $r'' = -4\cos(2\theta)$. Quando $\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$ temos $r'' < 0$, portanto, pontos de máximo; para $\theta = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \ldots$ temos $r'' > 0$, portanto, pontos de mínimo.

Para $\theta = \pi/4$, $r = 0$, ou seja, a curva passa pelo polo quando $\theta = \pi/4$.

Também r não se altera ao trocar θ por $\theta + 2\pi$.

Assim, basta fazer o gráfico para $0 \le \theta \le \pi/2$ e completá-lo, a partir das simetrias.

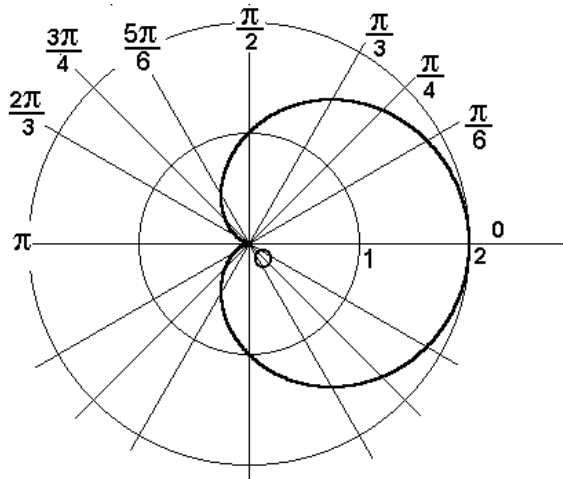
θ	r
0	1
π/6	0,5
π/4	0
π/3	-0,5
π/2	-1

Equações da forma r = a*sen*(nθ) ou r = a*cos*(nθ) para n inteiro positivo representam rosáceas.

Exemplo 5. r = 1+*cos* θ.

Temos 1+*cos* θ = 1+*cos*(–θ) ≠ 1+*cos*(π–θ). Também, 1+*cos* θ ≠ 1+*cos* (π+θ). Logo, o gráfico é simétrico em relação ao eixo x mas não é simétrico em relação ao eixo y e nem em relação ao polo. Também r não se altera ao trocar θ por θ+2π.

Como $\frac{dr}{d\theta} = -\text{sen}\ \theta$, temos pontos críticos para θ = 0 e θ = π. Para θ = 0 temos um ponto de máximo (2,0) e para θ = π temos um ponto de mínimo (0,π).

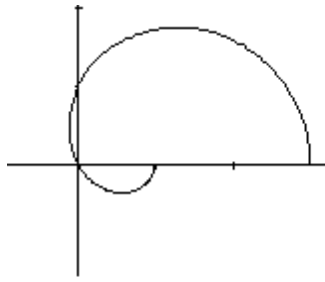
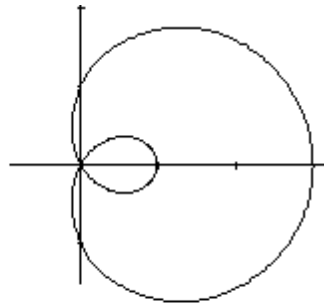
Pontos para o gráfico:

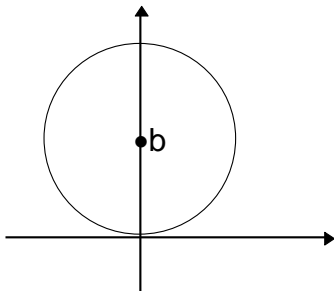
θ	r
0	2,00
π/6	1,87
π/4	1,71
π/3	1,50
π/2	1,00
2π/3	0,50
3π/4	0,29
5π/6	0,13
π	0,00

Equações da forma r = a(1±*sen* θ) ou r = a(1±*cos* θ) representam uma categoria de curvas chamadas cardióides, por terem a forma de coração.

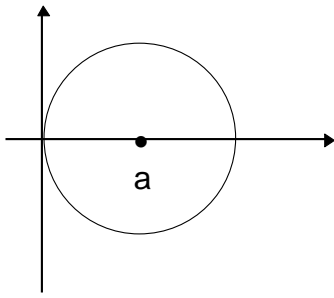
Exemplo 6. r = 1+2*cos* θ

Como no exemplo anterior, temos que o gráfico é simétrico em relação ao eixo x, mas não é simétrico em relação ao eixo y e ao polo.

Pontos para o gráfico:

θ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$	$7\pi/12$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$11\pi/12$	π
r	3	2,93	2,73	2,41	2	1,52	1	0,48	0	–0,41	–0,73	–0,93	–1

Equações do tipo r = a ± b *sen* θ, ou r = a ± b *cos* θ, são chamadas limaçons. Quando b>a>0 ou b<a<0 seu gráfico apresenta um laço, semelhante ao gráfico acima. Se a = b a equação representa uma cardióide.

Exemplo 7. Circunferência passando pela origem, centro na reta e = $\pi/2$ (eixo y) em $(b,\pi/2)$ e raio |b|.

A equação da circunferência com centro em coordenadas cartesianas (0,b) e raio |b|, em coordenadas cartesianas é $x^2 + (y - b)^2 = b^2$. Desenvolvendo esta equação obtemos $x^2 + y^2 - 2by = 0$. Transformando para coordenadas polares, obtemos $r^2cos^2\theta + r^2sen^2\theta - 2brsen\theta = 0$, ou seja, $r^2(cos^2\theta + sen^2\theta) - 2brsen\theta = 0$. Assim, a equação em coordenadas polares fica $r^2 = 2brsen\,\theta$. Portanto, r = 0 ou $r = 2bsen\,\theta$. Mas na equação $r = 2bsen\,\theta$, temos que r = 0 quando θ = 0. Assim, basta tomar a equação $r = 2bsen\,\theta$.

Exemplo 8. Circunferência passando pela origem, centro na reta e = 0 (eixo x) em $(a,\pi/2)$ e raio |a|.

Desenvolvendo, como no exemplo anterior, obtemos a equação $r = 2a\cos\theta$.

Exemplo 9. Reta paralela ao eixo polar.

Em coordenadas cartesianas, a equação de uma reta paralela ao eixo x é dada por $y = b$. Passando para coordenadas polares , a equação fica $r\,sen\theta = b$, ou seja, $r = b\,cossec\theta$.

Exemplo 10. Reta perpendicular ao eixo polar.

Em coordenadas cartesianas, a equação de uma reta perpendicular ao eixo x é dada por $x = a$. Fazendo como no exemplo anterior a equação, em coordenadas polares é dada por $r = a\sec\theta$.

Exercícios. Elaborar os gráficos das funções.

a) $r = sen\,(2\theta)$ b) $r = 1 + sen\,\theta$ c) $r = \frac{1}{2}\,\theta$

Gráficos em coordenadas polares no winplot.

Para trabalhar com o plano polar acione “ver”, “grade” e selecione as opções “eixos”, “polar” e “setores polares”

Acione no menu “Equação, Polar” para abrir a janela para equação em coordenadas polares.

Note que a letra t indica o ângulo θ.

Indique a variação de t em “t min” e “t máx”

Para colocar ponto em coordenadas polares, acione “Equação, Ponto (r,t)...”

Exemplo. Entre com a equação polar r = t/2, colocando “t min = 0 e t máx = 2*pi’’

Entre com o ponto em coordenadas polares (a/2,a)

Faça a animação de a de 0 a 2*pi

Exemplo. Faça como no exemplo anterior para cada uma das equações

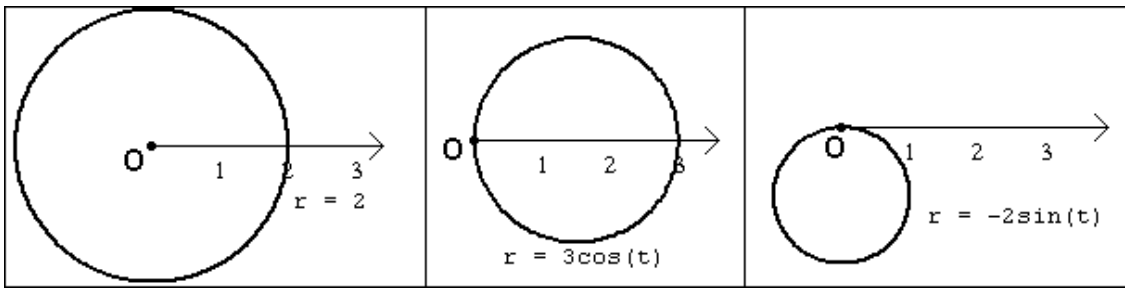
a) $r = -t/2$ (é a mesma curva do exemplo anterior?)
b) $r = 3$
c) $r = 1 + 2\cos(t)$. Qual o menor valor para "t máx" para que o gráfico seja uma curva fechada?

Exercícios.

1. Entre com as equações $r = 3\cos(2t)$, $r = 3\cos(4t)$ e $r = 3\cos(6t)$. Qual a relação entre os números (pares) que aparecem multiplicando t e os gráficos. Teste sua resposta para outros valores destes números.
2. Na atividade anterior, o número 3 multiplicando o cosseno tem algum significado? Troque o 3 por alguns outros números e tente chegar a uma conclusão.
3. Faça como na atividade (1) para as equações $r = 4\cos(t)$, $r = 4\cos(3t)$ e $r = 4\cos(5t)$.
4. Para a curva de equação polar $r = 1 + \cos(t)$, tomando t min = 0, qual o menor valor de t máx para que o gráfico seja uma curva fechada?
5. Gráficos clássicos em coordenadas polares
   a) $r = 2$ b) $r = t$ c) $r = 2\cos(t)$ d) $r = -3\cos(t)$ e) $r = 2+2\cos(t)$ f) $r = 2-2\cos(t)$
   g) $r = 2+4\cos(t)$ h) $r = 4+2\cos(t)$
6. Na atividade anterior troque cosseno por seno.
7. Observe, graficamente, que as equações cartesiana $2x+3y = 4$ e polar $r = 4/(2\cos(t)+3\sin(t))$ representam a mesma reta.
8. Em vista da atividade anterior, qual seria a equação polar da reta $y = 2x-5$?
9. Tente generalizar as duas atividades anteriores para uma reta de equação $y = ax+c$. Verifique graficamente se sua teoria pode funcionar.

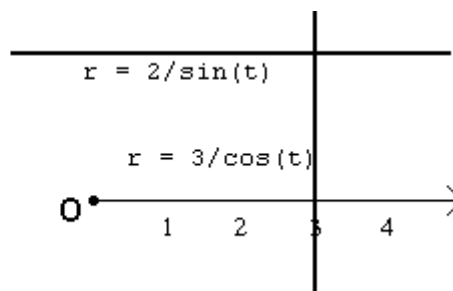
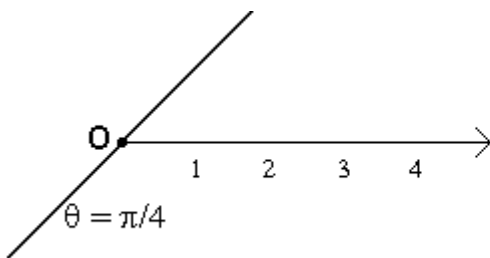
Equações de algumas curvas especiais em coordenadas polares

Circunferências

a) $r = c$: circunferência com centro no polo e raio $|c|$.
b) $r = a\cos(\theta)$: circunferência com centro na reta $\theta = 0$, passando pelo polo e raio $|a|/2$.
c) $r = a\,\text{sen}(\theta)$: circunferência com centro na reta $\theta = \pi/2$, passando pelo polo e raio $|a|/2$.

Retas

a) $\theta = a$: reta passando pelo pólo

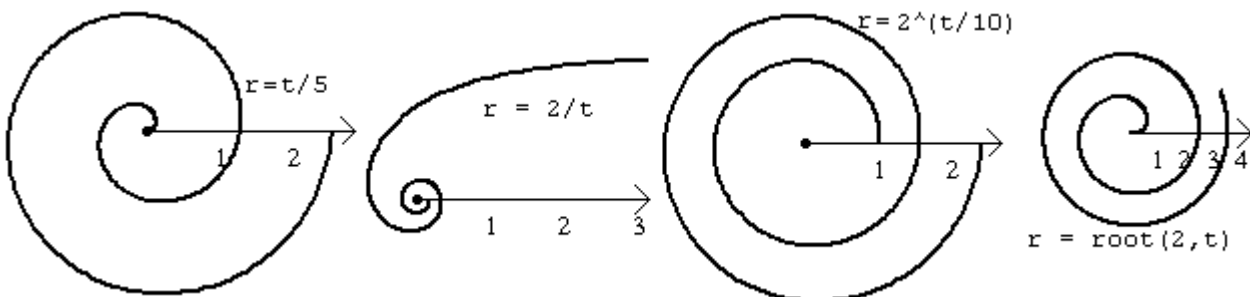
b) $r\,\text{sen}(\theta) = a$: reta paralela ao eixo polar

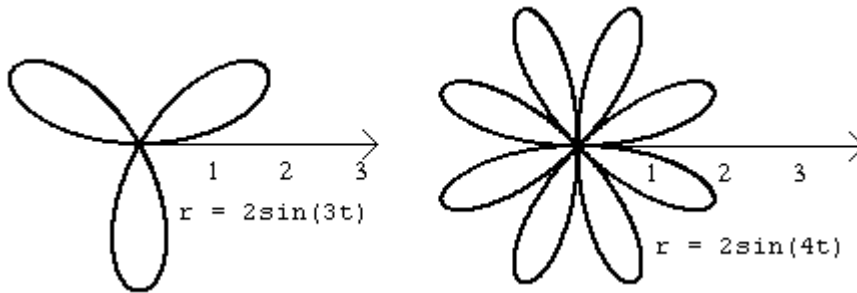
c) $r\cos(\theta) = a$: reta perpendicular à reta que contém o eixo polar

Espirais

a) $r = a\theta$: espiral de Arquimedes

b) $r = a/\theta$: espiral hiperbólica

c) $r = a^{b\theta}$, $a > 0$: espiral logarítmica

d) $r = a\sqrt[n]{\theta}$: espiral parabólica quando n = 2

Rosáceas

$r = a\text{sen}(n\theta)$ ou $r = a\cos(n\theta)$, n inteiro positivo, $a \neq 0$. Se n é par, o gráfico consiste de 2n laços. Se n é ímpar, o gráfico consiste de n laços. Observe que se n = 0 ou n = ±1, obtém-se equações de circunferências ou o pólo (caso r = asen(nt)).

Limaçons

$r = a + b\text{sen}(\theta)$ ou $r = a + b\cos(n\theta)$, n inteiro positivo, $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Se $|a|<|b|$ apresentam laço. Se a = b recebem o nome de **cardióide** pelo formato de coração da curva.

Lemniscatas

$r^2 = \pm\, a\cos(2\theta)$ ou $r^2 = \pm\, a\text{sen}(2\theta)$